GRADOS DE LIBERTAD DE IMÁGENES ÓPTICAS EN LA APROXIMACIÓN DE BORN

Edwin A. Marengo
Vicerrectoría de Investigación, Postgrado y Extensión
Universidad Tecnológica de Panamá
Apartado 6-2894, El Dorado
Panamá, República de Panamá

RESUMEN

Una nueva formulación del problema de dispersión inversa (*inverse scattering problem*) es derivada en la aproximación de Born la cual está basada en el uso de campos multipolares en la definición de la matriz de dispersión (*scattering matrix*). Dicha formulación es utilizada para derivar el contenido informático del campo radiado o, equivalentemente, el número de grados de libertad del objeto o imagen a ser reconstruída, dentro del marco de la aproximación de Born. La teoría es desarrollada para campos escalares, pero todos los resultados principales se aplican directamente al caso electromagnético vectorial.

Palabras claves: dispersión inversa, problema inverso, contenido de información de campos radiados.

ABSTRACT

A new formulation of the inverse scattering problem is derived in the Born approximation that is based on using multipole fields in the definition of the scattering matrix. This formulation is used to derive the information content of the radiated field or, equivalently, the number of degrees of freedom of the reconstructed object or image, in the framework of the Born approximation. The theory is developed for scalar fields but all the main results apply directly to the vector electromagnetic case.

Keywords: inverse scattering, inverse problem, information content of radiated fields.

1. Introducción

Un problema de considerable interés práctico en modelos de inversión electromagnética tales como la dispersión inversa de ondas (*wave inverse scattering*) es el de caracterizar cuantitativamente el contenido de información de los campos electromagnéticos o, equivalentemente, la determinación del número de grados de libertad de las imágenes reconstruidas. Este tema ha sido investigado exhaustivamente por el grupo del Profesor Rocco Pierri en la Seconda Universita di Napoli en conexión con diferentes modelos de dispersión inversa de ondas [1,2]. Otros aspectos del tema han sido tratados por Bertero [3] y Basinger et. al [4].

El objetivo central del presente trabajo es derivar el número de grados de libertad de imágenes de objetos tri-dimensionales reconstruidos a partir de sus campos electromagnéticos dispersados en la aproximación (lineal) de Born. A fin de proveer una idea intuitiva de dichos grados de libertad, consideramos los casos especiales de objetos con distintas simetrías, tales como objetos con variaciones espaciales radiales, angulares, y combinaciones de ellas. La formulación del problema de dispersión inversa (*inverse scattering problem*) presentada en este trabajo es nueva, y está basada en campos multipolares en tres dimensiones espaciales.

La formulación en cuestión puede utilizarse para resolver de modo exacto la versión linealizada (de Born) del problema de dispersión inversa (*inverse scattering problem*) según las técnicas usuales de problemas inversos lineales. Pero el propósito aquí es utilizar la nueva formulación a fin de derivar sistemáticamente los grados de libertad de la imagen reconstruída, para distintos tipos de objetos radiantes. A diferencia de los tratamientos del tema encontrados en las ref. [1-4], en este trabajo enfatizamos en objetos tri-dimensionales en vez de objetos descritos por una o dos dimensiones espaciales. También explicamos cómo los resultados derivados para campos escalares se aplican directamente a campos electromagnéticos vectoriales. La metodología general presentada, la cual puede extenderse fácilmente a otros problemas de inversión, permite una determinación sistemática de los grados de libertad de la imagen e ilustra las clases de objetos reconstruíbles mediante el modelo linealizado de Born del problema inverso.

2. Formulación del Problema Inverso con Campos Multipolares

Considere el problema de dispersión inversa escalar (*scalar inverse scattering problem*) en el marco de la ecuación de Helmholtz en el espacio libre tri-dimensional, a saber,

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = V\psi \qquad (1)$$

donde $\psi(\mathbf{r})$ es el campo total (campo incidente ψ_i más campo dispersado ψ_s), $V(\mathbf{r})$ es el potencial de dispersión (*scattering potential*), ∇^2 es el operador Laplaciano en tres dimensiones espaciales, y $k=\omega/c$ es el número de onda, donde ω es la frecuencia angular de oscilación temporal y c es la velocidad de propagación de la onda en el espacio libre que envuelve al objeto. La expresión (1) puede ser re-escrita como

$$(\nabla^2 + k^2)(\psi_s + \psi_i) = V(\psi_s + \psi_i) \qquad (2)$$

En la aproximación de Born, el campo dispersado

$$\psi_s = \int d\mathbf{r}\, G\, V\, \psi_i \qquad (3)$$

donde G es la función de Green en el espacio libre y $d\mathbf{r}$ es el elemento diferencial en el espacio de tres dimensiones. Dicho campo dispersado también puede escribirse en términos de la expansión multipolar del campo radiado

$$\psi_s = \sum_{l,m} a_{l,m}\psi_{l,m} \qquad (4)$$

donde el campo multipolar

$$\psi_{l,m} = h_l^{+}(kr)Y_{l,m}(\mathbf{s}) \qquad (5)$$

donde $h_l^{+}(kr)$ es la función de Hankel esférica de la primera clase y de orden l, $Y_{l,m}(\mathbf{s})$ es el armónico esférico de grado l y orden m, y $\mathbf{s}=\mathbf{r}/r$ es el vector unitario en la dirección del vector de posición $\mathbf{r}$. Los momentos multipolares $a_{l,m}$ del campo dispersado están entonces definidos mediante los productos internos

$$a_{l,m} = \langle\Lambda_{l,m}|V\psi_i\rangle_X = \int d\mathbf{r}\, \Lambda_{l,m}^{*}\, V\, \psi_i \qquad (6)$$

donde * denota el conjugado complejo (*complex conjugate*) y $\Lambda_{l,m}$ es el campo libre multipolar (*source-free multipole field*), el cual está definido como

$$\Lambda_{l,m} = j_l(kr)\, Y_{l,m}(\mathbf{s}) \qquad (7)$$

donde $j_l(kr)$ es la función de Bessel esférica de orden l.

El problema de dispersión inversa (*inverse scattering problem*) puede formularse como el problema de reconstruir el perfil espacial del potencial de dispersión $V(\mathbf{r})$ a partir del conocimiento de los momentos multipolares $a_{l,m}(L,M)$ determinados a través de experimentos de dispersión (*scattering experiments*) involucrando todos los $\Lambda_{L,M}$

como campos incidentes. Esta estrategia es admisible dado que el campo incidente más general puede expandirse como una suma de todas las ondas esféricas $\Lambda_{L,M}$. Entonces, introducimos la matriz de dispersión (scattering matrix) A cuyos elementos son

$$A(l,m,L,M) = a_{l,m}(L,M) = \text{“}a_{l,m} \text{ para } \psi_i = \Lambda_{L,M}\text{”}.$$

Entonces se deduce de (6) con $\psi_i = \Lambda_{L,M}$ que,

$$A_{l,m}(L,M) = \int dr\, \Lambda_{l,m}^{*}\, V\, \Lambda_{L,M}. \qquad (8)$$

Restringimos nuestra atención a potenciales de dispersión de soporte compacto. Introducimos entonces un volumen esférico $D: r \leq R$ dentro del cual se encuentra completamente confinado el potencial en cuestión. Definimos también los espacios de Hilbert X y Y de la solución (potenciales de dispersión V) y de la data (matrices de dispersión A), respectivamente, y les asignamos los productos internos L_2 usuales

$$<V_1|\, V_2>_X = \int d\mathbf{r}\, V_1^{*}\, V_2$$

y

$$<A_1|A_2>_Y = \sum_{l,m,L,M} A_1^{*}(l,m,L,M)\, A_2(l,m,L,M). \qquad (9)$$

Mediante el formalismo usual, definimos el mapeo directo $L{:}X \rightarrow Y$ el cual definimos usando (8)-(9), obteniendo

$$A(l,m,L,M) = <\Lambda_{l,m}|V\, \Lambda_{L,M}>_X = \int dr\, \Lambda_{l,m}^{*}\, V\, \Lambda_{L,M} = (LV)(l,m,L,M). \qquad (10)$$

El mapeo adjunto $L^{+}{:}Y \rightarrow X$ de L es definido a partir de L de tal forma que

$$<V|L^{+}A>_X = <LV|A>_Y \qquad (11)$$

y encontramos mediante (9)-(11) que

$$(L^{+}A)(\mathbf{r}) = M(r)\sum_{l,m,L,M} A(l,m,L,M)\, \Lambda_{l,m}\, \Lambda_{L,M}^{*} \qquad (12)$$

donde M(r) es una función característica del soporte del objeto radiante cuyo valor es 1 si $r \leq R$ (región que encierra enteramente al objeto) y es 0 en caso contrario.

La solución del problema de dispersión inversa, es decir, el potencial de dispersión V correspondiente a una matriz de dispersión A especificada, está definida por el operador pseudoinverso (*pseudoinverse operator*) $L^{+}(LL^{+})^{-1}$ de L (técnicas de regularización pueden incorporarse en presencia de ruido en la data). Una expresión explícita puede derivarse fácilmente de la formulación de arriba usando dicho operador. No obstante, el objetivo aquí es derivar los grados de libertad o el contenido informático del campo radiado. Vamos a presentar a continuación la formulación asociada para el caso especial de un potencial de dispersión esféricamente simétrico, es decir, un potencial de dispersión con sólo dependencia espacial radial.

3. Formulación del Problema Inverso de Objetos Esféricamente Simétricos

Considere el caso especial de un potencial de dispersión con dependencia radial $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Para lidiar con este caso, es conveniente definir el espacio de Hilbert X de objetos o imágenes con dependencia radial cuyo producto interno está definido como

$$<V_1|\, V_2>_X = \int dr\, r^2\, V_1^{*}\, V_2 \qquad (13)$$

donde se sobreentiende que los potenciales de dispersión son funciones del radio *r* solamente.

El mapeo directo de *V* a *A* está definido mediante

$$A(l,m,L,M) = \int dr\, r^2\, V(r)\, j_l(kr)\, j_L(kr) \int ds\, Y_{l,m}^{*}(s)\, Y_{L,M}(s) = \delta l,L\delta m,M \int dr\, r2\, V(r)\, jl(kr)\, jL(kr). \qquad (14)$$

donde hemos usado la propiedad de ortogonalidad de los armónicos esféricos. Solamente los elementos en la diagonal de la matriz de dispersión definida en (14) tienen valores no triviales. Todos los elementos afuera de la diagonal tienen valor cero. Definimos

$$b_l = \int dr\, r^2\, V(r)\, j_l^2(kr) \qquad (15)$$

de tal forma que (14) se reduce a

$$A(l,m,L,M) = b_l\, \delta_{l,L}\delta_{m,M}. \qquad (16)$$

La expansión multipolar del campo dispersado correspondiente al campo incidente l,m está definida a partir de (4)-(5) y (16) como

$$\begin{aligned}\psi_s(l,m) &= \sum_{l,m} A(l,m,l,m)\psi_{l,m}\\ &= \sum_l j_l(kr) \sum_m A(l,m,l,m) Y_{l,m}(s)\\ &= \sum_l b_l\, j_l(kr) \sum_m Y_{l,m}(s).\end{aligned}$$

En estas expansiones, los términos relevantes son, como es bien conocido, l=0,…,N~kR mientras que m toma valores de –N a N. La razón por la que los términos l > N no deben ser considerados, en la práctica, es también bien conocida (ver, por ejemplo, Bertero [3]). En particular, se debe a que en las expansiones del campo dispersado, dichos términos decaen exponencialmente rápido para l > N. En vista de (15)-(16), vemos que los pedazos independientes de información sobre el objeto o imagen son provistos únicamente por los coeficientes b_l, de tal manera que son sólo N+1 los pedazos independientes de información que podemos obtener sobre el objeto en el modelo linealizado considerado aquí. Los pedazos independientes de información son las proyecciones del objeto a ser reconstruido sobre las N+1 funciones $j_l^2(kr)$, para l=0 hasta N~kR. El número de grados de libertad (*number of degrees of freedom (NDF)*) (según la definición de esta cantidad establecida en [1]) en este caso es N~kR donde k es el número de onda del campo y R es el radio de la región esférica más pequeña capaz de contener enteramente al objeto radiante desconocido. Los potenciales de dispersión V(r) que pueden ser reconstruídos mediante este modelo son sencillamente aquellos para los cuales los coeficientes b_l donde l > N son pequeños. Es más, podemos considerar a continuación el asociado problema adjunto y el operador $LL^+:Y\rightarrow Y$ para ver exactamente cuáles son las funciones de expansión del campo radiado que se relacionan a dichos coeficientes.

Es conveniente definir a continuación el espacio de Hilbert de los vectores de la data A(l) a los cuales asignamos el producto interno

$$\langle A_1 | A_2 \rangle_Y = \sum_l A_1^*(l) A_2(l).$$

Aquí hemos suprimido la dependencia en m; ésta no es relevante en el caso de una simetría esférica como hemos demostrado en (14)-(16).

Ahora bien, a partir de (13)-(16) y (11) con los productos internos de X y Y definidos arriba uno obtiene

$$(L^+A)(r) = M(r) \sum_l A(l)\, j_l^2(kr). \qquad (17)$$

así, que según (16), A(l) es igual a b_l.

El potencial de inversión reconstruido está dado por la fórmula

$$V(r) = [L^+(LL^+)^{-1}A](r). \qquad (18)$$

Vemos a partir de (13)-(18) que $LL^+:Y\rightarrow Y$ está definido por

$$[(LL^+)A](l) = \sum_n A(n) \int dr\, M(r)\, r^2\, j_l^2(kr)\, j_n^2(kr).$$

Las funciones y valores singulares de este caso son determinados fácilmente. Los vectores de data singulares son, aparte de una normalización, simplemente los vectores A_l cuyos elementos son $A_l(n) = \delta_{l,n} b_l$. Los potenciales singulares de dispersión V_l (la base para los potenciales reconstruibles de Born) son, aparte de una normalización, simplemente $V_l = M(r)\, j_l^2(kr)$. Los valores singulares están definidos por las integrales $\sigma_l^2 = \int dr\, M(r)\, r^2\, j_l^4(kr)$.

Resumiendo, estas manipulaciones en el dominio multipolar han revelado el contenido de información de los campos dispersados de Born y la clase de funciones esféricamente simétricas reconstruibles mediante tal modelo. Consideramos a continuación el caso especial de potenciales de dispersión con dependencia angular solamente.

4. Contenido de Información de Campos Escalares Dispersados para Objetos con Dependencia Angular

En este caso especial, la matriz de dispersión

$$\begin{aligned} A(l,m,L,M) &= \langle \Lambda_{l,m} | V\, \Lambda_{L,M} \rangle_X \\ &= \int dr\, \Lambda_{l,m}^{*}\, V\, \Lambda_{L,M} \end{aligned}$$

se reduce a

$$A(l,m,L,M) = b_{l,L} \int ds\, Y_{l,m}^{*}(s)\, Y_{L,M}(s)\, V(s).$$

donde $b_{l,L} = \int dr\, M(r)\, r^2\, j_l(kr)\, j_L(kr)$ donde $M(r)$ es la función característica utilizada previamente (la cual es igual a 1 en el interior de un volumen esférico de radio R que encierra completamente al objeto y es 0 afuera).

Recordamos que [5]

$$Y_{l,m}(s) = \alpha_l^m\, P_l^m(\cos\theta)\exp(im\phi)$$

Donde

$\alpha_l^m = (-1)^m \sqrt{[(2l+1)/4\pi(l-m)!/(l+m)!]}$ y $P_l^m(\cos\theta)$ es el polinomio asociado de Legendre de grado l y orden m. En el caso más general, cualquier potencial de dispersión que depende solamente de las variables angulares puede expandirse como una serie de armónicos esféricos. En ese caso, los componentes independientes de información acerca del objeto a ser reconstruido están contenidos en los coeficientes de la expansión correspondiente en armónicos esféricos. Los términos relevantes en la expansión desde el punto de vista de estabilidad son los primeros N+1 términos en l, lo cual se aplica tanto a l como a L, conjuntamente con las 2N+1 dependencias en m y M. Esto implica un total de $[(N+1)(2N+1)]^2$ coeficientes independientes de expansión armónica. Un caso especial de interés y donde el contenido de información es más reducido, es el caso de un objeto con dependencia separable de los ángulos acimutal y polar. Vamos a considerar primero el caso de dependencia acimutal y luego analizaremos el correspondiente caso de dependencia del ángulo polar. Los resultados obtenidos más adelante para el ángulo acimutal son idénticos a los reportados en [2] para problemas en dos dimensiones espaciales. No obstante, los argumentos utilizados aquí son desarrollados directamente en el espacio de tres dimensiones, en el dominio multipolar el cual es exclusivo de esta presentación. También vamos a explicar la teoría más general la cual hace uso de integrales de tres armónicos esféricos en vez de las integrales más familiares que involucran solamente dos armónicos esféricos. Las últimas son las que hacen uso de las relaciones de ortogonalidad más conocidas. La teoría más general en cuestión hace uso de desarrollos en teoría de grupos y, en particular, de los coeficientes de Clebsch-Gordan [5].

5. Caso Especial: Dependencia Acimutal

Escribimos

$$V(\phi) = \sum_q C_q \exp(iq\phi)$$

de tal forma que

$$A(l,m,L,M) = b_{l,L} \int ds\, Y_{l,m}^{*}(s)\, Y_{L,M}(s)\, V(\phi)$$

$$= \alpha_l^m\, b_{l,L} \int d\theta \sin\theta\, P_l^m(\cos\theta)\, P_L^M(\cos\theta) \sum_q C_q \int d\phi \exp[i(-m+M+q)\phi]$$

$$= 2\pi\alpha_l^m\, b_{l,L} \int d\theta \sin\theta\, P_l^m(\cos\theta)\, P_L^M(\cos\theta) \sum_q C_q\, \delta_{M+q-m,0}.$$

Debido a que los índices M y m toman valores de –N a N, se deduce que el número relevante de coeficientes Cq (el contenido de información) en el caso de dependencia acimutal solamente es 4N +1. El número mínimo ocurre cuando M=N,m=-N, de tal forma que la función delta de Kronecker requiere N+q+N=0, es decir, q = -2N. La condición máxima ocurre cuando M=-N, m=N, y entonces q=2N. Los coeficientes relevantes en la suma tienen índices –2N, ...,0,..., 2N lo cual implica un total de 4N+1 números. Este es el mismo resultado derivado en [2] para el problema en dos dimensiones. Esto era de esperar dado que la dependencia acimutal tiene una naturaleza idéntica en los problemas en dos y en tres dimensiones.

6. Caso Especial: Dependencia Polar

En este caso expandimos

$$V(\theta) = \sum_q C_q\, P_q^0(\cos\theta).$$

Ahora bien,

$$A(l,m,L,M) = b_{l,L} \int ds\, Y_{l,m}^{*}(s)\, Y_{L,M}(s)\, V(\theta) = \alpha_l^m\, b_{l,L}\, \delta_{m,M} \sum_q C_q \int d\theta \sin\theta\, P_l^m(\cos\theta)\, P_L^m(\cos\theta)\, P_q^0(\cos\theta).$$

Esta integral, la cual involucra tres funciones asociadas de Legendre, puede ser resuelta mediante métodos de teoría de grupos. El método general es descrito abajo y permite deducir el número de grados de libertad en la dependencia en el ángulo polar.
Si q=0, entonces la integral se reduce a la integral de ortogonalidad usual de las funciones asociadas de Legendre. Si q=1, entonces tenemos $P_1^0(\cos\theta)=\cos\theta$. Ahora la integral toma la forma

$$\int d\theta \sin\theta \cos\theta\, P_l^m(\cos\theta)\, P_L^m(\cos\theta).$$

Aplicando las relaciones de recurrencia de las funciones asociadas de Legendre, podemos re-escribir esta integral en una forma que involucra sólo dos funciones asociadas de Legendre. Este resultado es general, aplicándose a la integral más general involucrando tres funciones de Legendre. Así podemos re-escribir cualquier integral de este tipo como una suma de otras integrales que involucran sólo dos funciones de Legendre. Este es el paso crucial dado que luego podemos emplear las relaciones de ortogonalidad y evaluar cualquier integral de este tipo en forma explícita. El caso especial q=1 rinde mediante una manipulación sencilla las expresiones 12.189-12.192 en [5]. Es importante para nosotros saber que la integral de arriba se reduce para q=1 a dos integrales involucrando sólo dos funciones asociadas de Legendre. Debido a la relación de ortogonalidad, las únicas contribuciones relevantes provienen de los términos l,L+1 y l,L-1, es decir, los términos en los polinomios $P_{l+1}^m(\cos\theta)\, P_l^m(\cos\theta)$ y $P_{l-1}^m(\cos\theta)\, P_l^m(\cos\theta)$. Para una q cualquiera, tendríamos términos en los polinomios hasta el punto en que l=L+q, l=L-q, de tal forma que q tendrá valores de 0 a N (el valor máximo de l y L es N, de tal forma que la máxima q se deduce mediante l=L+q, donde l=N, L=0, q=N, y el mínimo es obviamente q=0). Los términos de q negativa no son considerados porque no son linealmente independientes de los términos de q positiva. En conclusión, el número de componentes independientes de información es, en este caso, N+1 (los N coeficientes C_q en la expansión de arriba). El número de grados de libertad es, entonces, N, en la dependencia angular polar.

7. Caso Electromagnético

Finalmente, terminamos esta discusión comentando que todas las conclusiones principales del análisis precedente se aplican también al caso electromagnético vectorial. La versión vectorial de dicho análisis, la cual no presentaremos aquí, hace uso de un formalismo con los campos multipolares vectoriales asociados con los campos eléctricos y magnéticos. El formalismo sigue líneas similares a las de su homólogo escalar en la aproximación de Born. El contenido informático es idéntico al encontrado aquí con la formulación escalar si el objeto mismo a ser reconstruido es, de por sí, también escalar (un índice de refracción, por ejemplo, pese a que la formulación del campo puede ser exactamente vectorial). En el caso de un objeto escalar interrogado mediante ondas electromagnéticas, uno puede utilizar o multipolos eléctricos o multipolos magnéticos, pero el uso de ambos no proveerá información independiente sobre el objeto o la imagen en cuestión. En el caso más general de un objeto diádico (a dyadic object) donde el objeto es modelado como un potencial de dispersión diádico, el contenido de información es doblado automáticamente en relación a su homólogo escalar. En dicho caso el contenido informático de los multipolos eléctricos es completamente independiente del contenido informático de los multipolos magnéticos.

8. Conclusión

En este trabajo derivamos una nueva formulación en el dominio multipolar del problema de dispersión *inversa (inverse scattering problem)*, en el contexto de la aproximación de Born, en tres dimensiones espaciales. La nueva formulación permitió la derivación sistemática de los grados de libertad de la imagen reconstruida, para distintos tipos de objetos radiantes. También se discutió la clase de objetos reconstruibles en la aproximación de Born. Los resultados fueron derivados mediante una formulación escalar del campo. Luego vimos que los resultados finales aplican igualmente a la correspondiente formulación electromagnética vectorial. La metodología general desarrollada en el artículo es extensible a otros problemas de inversión.

9. Agradecimiento

El autor desea expresar su agradecimiento al Consejo Nacional de Investigaciones de Italia quien patrocinó una reciente visita académica suya a dicho país para investigar sobre el tema tratado aquí. Agradece muy especialmente sus interacciones científicas con los Profesores Rocco Pierri y Giovanni Leone y los Doctores Angelo Liseno, Adriana Brancaccio y Francesco Soldovieri de la Seconda Universita di Napoli. El autor también desea expresar su agradecimiento a la Vicerrectoría de Investigación, Postgrado y Extensión de la Universidad Tecnológica de Panamá tras haber proporcionado una licencia con sueldo durante la visita académica en cuestión.

10. Referencias Bibliográficas

[1] Pierri, R., Soldovieri, F., "On the information content of the radiated fields in the near zone over bounded domains", Inverse Problems, Vol. 14, p. 321, 1998.

[2] Brancaccio, A., Leone, G., Pierri, R., "Information content of Born scattered fields: results in the circular cylindrical case", J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 15, p. 1909, 1998.

[3] Bertero, M., "Super-resolution by data inversion", Progress in Optics, Vol. 36, p. 129, 1996.

[4] Basinger, S.A., Michielssen, E., Brady, D.J., "Degrees of freedom of polychromatic images", J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 12, p. 704, 1995.

[5] Arfken, G.B., Weber, H.J., Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, San Diego, 1995.